Riemannsche Submersionen

Definition: Seien (M, g), (N, h) Riemannsche Mfk. und sei $\pi : M \to N$ eine surjektive Submersion. Dann nennt man π eine Riemannsche Submersion, falls

$$d\pi : (\operatorname{Ker} d\pi)^{\perp} \longrightarrow TN$$

eine Isometrie ist.

Bemerkung: • $\operatorname{Ker}(d\pi)_m = T_m \pi^{-1}(n)$ $\qquad \pi(m) = n$

da: • $\pi^{-1}(n) \subset M$ Untermfk. der Dimension $\dim M - \dim N$
Faser (da π Submersion)

• $T_m M = \operatorname{Ker}(d\pi)_m \oplus (\operatorname{Ker}(d\pi))^{\perp}$

$(\operatorname{Ker} d\pi)^{\perp}_m \cong T_n N \quad \to \dim \operatorname{Ker} d\pi = \dim \pi^{-1}(n)$

• $X \in T_m \pi^{-1}(n) \quad \to X \in \operatorname{Ker}(d\pi)_m$

denn: $X = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \gamma(t)$ mit $\gamma : I \to \pi^{-1}(n)$

$\to d\pi(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \pi(\gamma(t)) = 0$

• $\to T_m \pi^{-1}(n) \subset \operatorname{Ker} d\pi$

$\to T_m \pi^{-1}(n) = \operatorname{Ker} d\pi$

Man nennt $T^v M = \operatorname{Ker} d\pi$. das vertikale Tangentialbündel, es ist ein Unterbündel von TM

$T^h M := (T^v M)^{\perp}$ ist das horizontale Tangentialbündel

d.h. $TM = T^h M \oplus T^v M$

$g_M = \pi^* g_N + g_F \qquad F$: Faser

Beispiele: • (B, g_B), (F, g_F) Riemannsche Mfk.

$M = B \times F$, $\quad g_M = g_B \oplus g_F$

$\to$ kanonische Projektionen $\quad \pi_1 : B \times F \to B$
$\pi_2 : B \times F \to F$

sind Riemannsche Submersionen

allgemeiner: gewarpte Produkte

Bemerkung: Sei (M, g) eine Riemannsche Mfk.

$G \subset \mathrm{Iso}(M, g)$ abgeschlossene Untergruppe

mit:
- $M/_G$ Mfk.
- $\pi: M \to M/_G$ Submersion (kanonische Projektion)

zB: G operiert frei und eigentlich

eigentlich: $G \times M \to M \times M$, $(g, m) \mapsto (m, g \cdot m)$ ist eigentlich d.h. das Urbild kompakter Mengen ist kompakt

$\to \exists!$ Riemannsche Metrik g_B auf $B = M/_G$ so dass π eine Riemannsche Submersion wird

Beispiel: Hopf-Faserungen
$$S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$
$$S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n \qquad S^{15} \xrightarrow[S^7]{} S^8$$

Satz (O'Neill Formel) Seien X, Y Vektorfelder auf N mit $|X| = |Y| = 1$, $X \perp Y$, sei $\pi: M \to N$ eine Riemannsche Submersion, seien $X^*, Y^* \in \Gamma(T^\alpha M)$ mit $d\pi(X^*) = X$, $d\pi(Y^*) = Y$ (dh. horizontale Lifts von X, Y). Dann gilt:
$$K_N(X, Y) = K_M(X, Y) + \frac{3}{4} \left| [X^*, Y^*]^v \right|^2$$

Motivation:
Riemannsche Submersionen mit total-geodätischen Fasern
Def. HFB + ass. Faserbündel

Satz: Sei $p: P \to B$ ein G-Hauptfaserbündel und sei F eine Mfk., auf der G operiert, sei $M = P \times_G F$ das assoziierte Faserbündel. Sei g_B eine Metrik auf B, sei g_F eine G-invariante Metrik auf F. Dann existiert genau eine Metrik g_M auf M, für die die kanonische Projektion $\pi: M \to B$ eine Riemannsche Submersion mit total-geodätischen Fasern isometrisch zu (F, g_F) ist.

G-Hauptfaserbündel: $\pi: P \to B$

mit:
- G operiert von rechts fasertreu und einfach-transitiv auf P
- $\exists$ Überdeckung $\{U_i\}$ von B und äquivariante Diffeomorphismen $\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$

G – Hauptfaserbündel

Definition: Sei G eine Lie-Gruppe, $\pi : P \to M$ eine glatte Abbildung. Das Tupel (P, π, M, G) heißt G – Hauptfaserbündel über M falls:

(i) G wirkt von rechts fasertreu und einfach-transitiv auf P, d.h.

- $\pi(p \cdot g) = \pi(p) \qquad \forall g \in G,\ p \in P$
- $\forall\, p, q$ mit $\pi(p) = \pi(q)\ \exists!\, g \in G : \quad p \cdot g = q$

$(\to M = P/G)$

(ii) Es existiert ein Bündelatlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ aus G-äquivarianten Bündelkarten, d.h.

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G \quad , \quad p \mapsto (\pi(p), s_i(p))$$

ist ein äquivarianter Diffeomorphismus

$$\phi_i(p \cdot g) = \phi_i(p) \cdot g = (\pi(p), s_i(p) \cdot g)$$

Beispiele:
- triviales G-HFB $\qquad P = M \times G \to M, \qquad (x, g) \cdot h = (x, gh)$
- Rahmenbündel: $\quad P_{Gl_n} = \{ p = (e_1, \dots, e_n) \mid (e_1, \dots, e_n) \text{ Basis in } T_x M, x \in M \}$
- homogene Räume; $H \subset G$ abgeschlossene Untergruppe

$\Rightarrow \quad \pi : G \to G/H \ , \ g \mapsto [g] \qquad$ kanonische Projektion

ist ein H-Hauptfaserbündel

z.B.: $\quad O(n+1) \to S^n = O(n+1)/O(n)$
- universelle Überlagerung, $\quad \pi : \tilde{M} \to M \quad$ ist ein $\pi_1(M)$-HFB
- Hopf-Faserungen

Definition: Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel und sei F eine Mfk. mit einer G-Wirkg. Man definiert:

$$P \times_G F = (P \times F)/_G \qquad \text{wobei} \quad (p, f)g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot f)$$

mit der kanonischen Projektion $\hat{\pi} : P \times_G F \to M, \ [p, f] \mapsto \pi(p)$. Dann ist $\hat{\pi}$ eine lokal-triviale Faserung mit Faser F, das zu $\pi : P \to M$ assoziierte Faserbündel

Beispiel: $\qquad TM = P_{Gl_n} \times_{Gl_n} \mathbb{R}^n \quad , \qquad Gl_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ (g, v) \mapsto g \cdot v$

$X \mapsto [p, (v_1, \dots, v_n)], \quad p = (e_1, \dots, e_n)$

$X = \sum_i v_i e_i$

__Satz:__ Sei $\pi: (M, g_M) \longrightarrow (N, g_N)$ eine Riemannsche Submersion mit total-geodätischen Fasern. Dann gilt:

$$\Delta^M (f \circ \pi) = (\Delta^N f) \circ \pi$$

für alle Funktionen $f \in C^\infty(N)$.

__Beweis:__ Sei $m \in M$, $T_m M = T_m^h M \oplus T_m^v M$

man ONB's $\{w_i\}$ von $T_m^h M$ und $\{v_j\}$ von $T_m^v M$

und zugehörige Geodätische γ_i und δ_j durch m

d.h. $\dot{\gamma}_i(0) = w_i$, $\dot{\delta}_j(0) = v_j$

$\pi: M \to N$ total-geodätische Submersion $\Rightarrow$ δ_j verläuft vollständig in der Faser $F = \pi^{-1}(n)$ mit $m \in F$

$\pi: M \to N$ Riemannsche Submersion $\to$ $\pi \circ \gamma_i$ ist Geodätische in N

$$\to \Delta^M (f \circ \pi)_m = -\sum_i \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} ((f \circ \pi) \circ \gamma_i)(t)$$

$$- \sum_j \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} ((f \circ \pi) \circ \delta_j)(t)$$

$$= -\sum_i \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} (f \circ (\pi \circ \gamma_i))(t)$$

$$= (\Delta^N f)_{\pi(m)}$$

__Anwendung:__ (M, g), (N, h) Riemannsche Mfl.

Riemannsches Produkt: $(M \times N, g + h)$

$pr_M : M \times N \to M$

$pr_N : M \times N \to N$

Beides sind total-geodätische Riemannsche Submersionen.

<u>Satz:</u> Seien $a \in C^\infty(M)$ und $b \in C^\infty(N)$, dann ist

$$a * b := pr_M^* a \cdot pr_N^* b$$
$$= (a \circ pr_M) \cdot (b \circ pr_N) \quad \in C^\infty(M \times N),$$

mit $(a*b)(m,n) = a(m) \cdot b(n)$, und es gilt:

$$\Delta^{M \times N}(a*b) = (\Delta^M a) * b + a * (\Delta^N b)$$

<u>Beweis</u>: Aus der Produktregel und dem letzten Satz folgt:

$$\Delta^{M \times N}(a * b) = \Delta^{M \times N}(pr_M^* a \cdot pr_N^* b)$$

$$= (\Delta^{M \times N} pr_M^* a) \cdot pr_N^* b + pr_M^* a \cdot (\Delta^{M \times N} pr_N^* b)$$
$$- 2 g(\operatorname{grad} pr_M^* a, \operatorname{grad} pr_N^* b)$$

$$= (\Delta^{M \times N} pr_M^* a) \cdot pr_N^* b + pr_M^* a \cdot (\Delta^{M \times N} pr_N^* b)$$

$$= pr_M^* (\Delta^M a) \cdot pr_N^* b + pr_M^* a \cdot pr_N^* (\Delta^N b) \qquad (\text{da } TM \perp TN \text{ in } T(M \times N))$$

$$= (\Delta^M a) * b + a * (\Delta^N b)$$

<u>Anwendung:</u> Seien a, b jetzt Eigenfunktionen von Δ, also:

$$\Delta^M a = \lambda a, \qquad \Delta^N b = \mu b$$

dh a ist Δ^M- Eigenfunktion zum Eigenwert λ

b ist Δ^N- Eigenfunktion zum Eigenwert μ

$\Rightarrow$ $a * b$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda + \mu$

Folgerung: Sei a eine Δ^M-Eigenfunktion zum Eigenwert λ und sei b eine Δ^N-Eigenfunktion zum Eigenwert μ. Dann ist $a * b$ eine Δ^{M*N}-Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda + \mu$ und jede Δ^{M*N}-Eigenfunktion ist von dieser Form.

Beweis: $\Delta^M a = \lambda a, \quad \Delta^N b = \mu b$

$$\rightarrow \Delta^{M*N} a*b = (\Delta^M a) * b + a * (\Delta^N b)$$
$$= (\lambda + \mu)\, a*b$$

Vorgriff:
- Δ^M besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen: $\mathcal{E}^M$

  analog Δ^Δ : $\mathcal{E}^N$

  $\rightarrow \mathcal{E}^M * \mathcal{E}^N := \{ a*b \mid a \in \mathcal{E}^M, b \in \mathcal{E}^N \}$

  ist ein Orthonormalsystem aus Δ^{M*N}-Eigenfunktionen

  (Fubini)

- $\mathcal{E}^M \subset C^\infty(M)$ dicht, $\quad \mathcal{E}^N \subset C^\infty(N)$ dicht

  $\rightarrow \mathcal{E}^M * \mathcal{E}^N \subset C^\infty(M*N)$ dicht

  $\rightarrow \mathcal{E}^M * \mathcal{E}^N$ enthält alle Δ^{M*N}-Eigenfunktionen

Bemerkung: Allgemeiner sei $\pi : M \to N$ eine Riemannsche Submersion mit total-geodätischen Fasern.

$f \in C^\infty(N), \quad \Delta^N f = \lambda f$

$$\Rightarrow \Delta^M (f \circ \pi) = (\Delta^N f) \circ \pi = \lambda\, f \circ \pi$$

Umgekehrt sei $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ mit $\tilde{f}$ konstant auf den Fasern, d.h. es existiert eine Funktion $f \in C^\infty(N)$ mit $\tilde{f} = f \circ \pi$ $\qquad \Delta \tilde{f} = \tilde{\lambda} \tilde{f}$

$$\Rightarrow \Delta^M \tilde{f} = (\Delta^N f) \circ \pi = \tilde{\lambda}\, f \circ \pi$$

$$\rightarrow \Delta^N f = \tilde{\lambda} f \qquad (\pi \text{ ist surjektiv})$$